

Varianta 90

SUBIECTUL I

- a) $AB = 10\sqrt{2}$.
- b) $a = 13$ și $b = -11$.
- c) $S = 9\sqrt{3}$.
- d) $\bar{z} = -2 + 5i$.
- e) $a = 1$ și $b = 4$.
- f) $BC = 2\sqrt{41}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $\det(A) = -30$.
- b) $p = \frac{4}{5}$.
- c) $x = \frac{5}{4}$.
- d) $x = 8$.
- e) Suma coeficienților polinomului f este $S = 0$.

2.

- a) $f'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -10$.
- c) $x = 0$ este asimptotă verticală.
- d) $\int_1^2 f(x) dx = 10 - \frac{1}{9 \cdot 2^9} + \frac{1}{9}$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 10$

SUBIECTUL III

- a) $\det(A) = 0$, iar $\det(B) = -32$.
- b) $A^2 = 12A$.
- c) $B(B - 4I_2) = A^2 - 12A + 32I_2 = 32I_2$.
- d) Fie $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} e & f \\ g & i \end{pmatrix}$, atunci $C \cdot D = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bi \\ ce + dg & cf + di \end{pmatrix}$ de unde $\det(C \cdot D) = aecf + aedi + bgcf + bgdi - afce - afdg - bice - bidg = aedi + bgcf - afdg - bice = (ad - bc)(ei - gf) = \det(C) \cdot \det(D)$.

- e) Soluția sistemului este $x = 0$ și $y = 0$.
- f) Fie $P(n): A^n = 12^{n-1} A$, $n \in \mathbf{N}^*$.
 $P(1): A = A \cdot (A)$.
 Presupunem $P(k)(A)$ și demonstrăm $P(k+1)(A)$, unde $k \geq 1$.
 $P(k): A^k = 12^{k-1} A$, iar $P(k+1): A^{k+1} = 12^k A$.
 Dar: $A^{k+1} = A^k \cdot A = 12^{k-1} A \cdot A = 12^{k-1} A^2 \stackrel{b)}{=} 12^k A$.
 De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- g) Presupunem că mulțimea G este finită atunci $\exists k, p \in \mathbf{N}$, $k \neq p$ dar
 $A^k = A^p \stackrel{f)}{\Leftrightarrow} 12^{k-1} A = 12^{p-1} A \Leftrightarrow 12^{k-1} = 12^{p-1} \Leftrightarrow k = p$ (F). Deci presupunerea
 făcută este falsă rezultă mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL IV

- a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
- b) Calcul direct.
- c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0$, $\Delta = 12 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$.
- d) $f'(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ și $f'(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$
 $\Rightarrow$ punctul $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ este un punct de maxim local, iar punctul $x = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ este
 un punct de minim local.
- e) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx - 3 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_0^1 x dx = \frac{1}{4}$.
- f) Calcul direct.
- g) Din f) $\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2}((f'(t))^2 + f'(t) + 1) - \frac{1}{2}((f'(t))^2 - f'(t) + 1), \forall t \in \mathbf{R}$.
 Integrând obținem că:
 $\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2}((f'(t))^2 + f'(t) + 1) dt - \int_0^x \frac{1}{2}((f'(t))^2 - f'(t) + 1) dt$.
 Notăm $\int_0^x \frac{1}{2}((f'(t))^2 + f'(t) + 1) dt \stackrel{not}{=} g(x)$ și $\int_0^x \frac{1}{2}((f'(t))^2 - f'(t) + 1) dt = h(x)$. Obținem
 că $f(x) - f(0) = g(x) - h(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - h(x)$ unde funcțiile h și g sunt strict
 crescătoare deoarece derivatele lor sunt pozitive $\forall x \in \mathbf{R}$.